14-10-15

Από εδώ και πέρα $u: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό (και συνεκτικό) και θα εστιάσουμε σε ΜΔΕ πρώτης και δεύτερης τάξης

Πρώτης τάξης: γραμμικές και παράδειγμα μη γραμμικής

Δεύτερης τάξης: γραμμικές (κύματος, θερμότητας, Laplace)

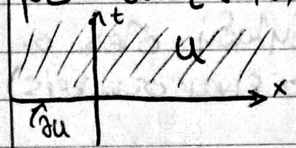
$\boxed{\text{Κεφάλαιο 2}}$ ΜΔΕ 1ης τάξης

Γενική μορφή: (1) $F(u_x(x,y), u_y(x,y), u(x,y), x, y) = 0, \ \forall (x,y) \in U$
όπου $F: \mathbb{R}^3 \times U \to \mathbb{R}$ θα είναι (τουλάχιστον) συνεχής συνάρτηση (συνήθως πολυώνυμο)

Κλασική λύση: $u \in C^1(U)$

Συνήθως η (1) συνοδεύεται από αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες

π.χ. Στην εξίσωση μεταφοράς: $u_t + c u_x = 0, \ (x,t) \in U$
με $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ και $\underbrace{u(x,0) = \varphi(x)}_{\text{αρχική συνθήκη}}, \ x \in \mathbb{R}$.



Παραδείγματα a) $F(p,q,z,x,y) = p^2 + q^2 - 1, \ p,q \in \mathbb{R}$
και η (1) γίνεται: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$ (εξίσωση εικόνας)
η οποία είναι πλήρως μη γραμμική
(καμία σχέση αυτή με την $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$, η οποία είναι γραμμική 2ης τάξης)

β) $F(p,q,z,x,y) = p + q - 1, \ p,q \in \mathbb{R} \xrightarrow{(1)} u_x + u_y = 1$,
η οποία είναι γραμμική 1ης τάξης, μη ομογενής

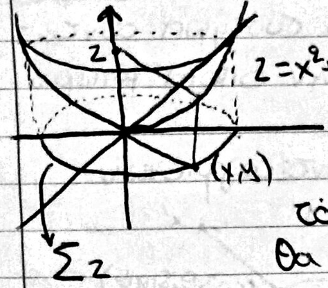
§2.1 Γραμμικές εξισώσεις 1ης τάξης

π.χ. i) $u_x = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \iff u(x,y) = f(y), \ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
με $f \in C^1(\mathbb{R})$ αν θέλουμε να ισχύει $u \in C^1(U)$

ii) $u_x + u_y = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 (= U)$
Για να καταλάβουμε αυτήν (δηλ. για να δούμε πώς συμπεριφέρεται η u) αλλά και για να την λύσουμε, θα την προσεγγίσουμε με τρεις αλληλένδετους τρόπους

1η προσέγγιση : Με καμπύλες στάθμης

Επανάληψη: Έστω $U\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό, $u: U\to\mathbb{R}$ C^1, $c\in\mathbb{R}$.
Τότε καμπύλη στάθμης c ονομάζουμε το σύνολο
$\Sigma_c = \{(x,y)\in U : u(x,y)=c\}$
(π.χ. $u(x,y)=x^2+y^2$, $U=\mathbb{R}^2 \Rightarrow \Sigma_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=c,\ c>0\}$
κύκλοι ακτίνας $\sqrt{c}$ με κέντρο το $(0,0)$



$z=x^2+y^2=u(x,y)$

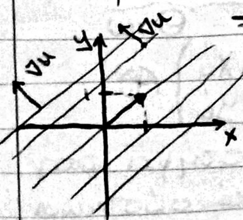
Για τις καμπύλες στάθμης ισχύει:
Αν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ με $\gamma(t)=(x(t),y(t))$
τότε το σημείο $(x_0,y_0)=\gamma(t_0)\in\Sigma_c$,
θα έχουμε $u(\underbrace{x(t),y(t)}_{=\gamma(t)})=c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) \overset{\text{Αλυσίδα}}{=} \nabla u(x(t),y(t))\cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{(x'(t),y'(t))}=0$$

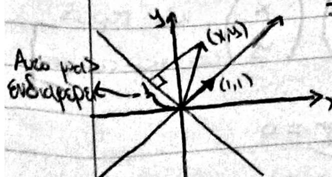
]

$$\Rightarrow \nabla u(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)=0,\ \forall t\in[a,b]$$

$u_x+u_y=0 \Rightarrow \nabla u(x,y)\cdot(1,1)=0 \Rightarrow \nabla u(x,y)\perp(1,1),\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow$
Οι καμπύλες στάθμης της u, είναι παράλληλες στο $(1,1)$



$\Rightarrow$ Συνεπώς, η τιμή της $u(x,y)$ εξαρτάται μόνο από την προβολή του (x,y) στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην $(1,1)$,
δηλαδή στην κατεύθυνση $(-1,1)\frac{1}{\sqrt2}$,
δηλαδή αφού $(x,y)=c(1,1)\frac{1}{\sqrt2}+s(-1,1)\frac{1}{\sqrt2}$
$\Rightarrow s=(x,y)\cdot(-1,1)\frac{1}{\sqrt2}=\frac{y-x}{\sqrt2}\Rightarrow$



$$\Rightarrow u(x,y)=f\left(\frac{y-x}{\sqrt2}\right)=g(y-x)=h(x-y)$$

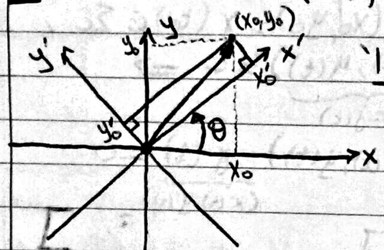
Επαλήθευση
$u_x+u_y=h'(x-y)-h'(x-y)=0$

<u>Παρατήρηση</u>: Κατανοούμε καλύτερα τώρα και την $u_x=0 \Rightarrow \nabla u(x,y)\cdot(1,0)=0 \Rightarrow \nabla u(x,y) \perp (1,0) \Rightarrow$ η $u(x,y)$ εξαρτάται μόνο από την προβολή του (x,y) στο $(0,1)$ δηλαδή από το $y \Rightarrow u(x,y)=f(y)$

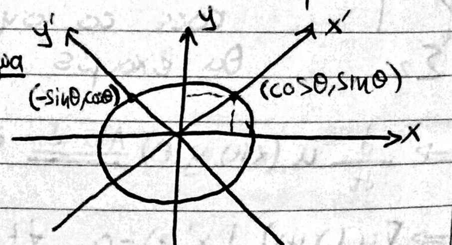
<u>2η προσέγγιση: Με αλλαγή συστήματος συντεταγμένων</u>

(<u>ΙΔΕΑ</u>: Έχω μια ΜΔΕ. Μήπως, αν αλλάξω σύστημα συντεταγμένων, θα πάρω μια απλή ΜΔΕ, την οποία μπορώ να λύσω πιο εύκολα;)

<u>Επανάληψη</u>: Στροφή συστήματος συντεταγμένων



<u>Ίδιο σχήμα</u>



Άρα, $(x_0,y_0)=x_0'(\cos\theta,\sin\theta)+y_0'(-\sin\theta,\cos\theta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0' = (x_0,y_0)\cdot(\cos\theta,\sin\theta) \\ y_0' = (x_0,y_0)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\Theta=\omega} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$\omega^{-1}=\Theta^{-1}=\Theta^T=\omega^T$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \Theta^T \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} \quad (*)$$

Αν στρέψουμε θετικά το καρτεσιανό σύστημα κατά θ, ένα διάνυσμα (x,y) ως προς το αρχικό σύστημα έχει συντεταγμένες $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ως προς το νέο σύστημα

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$, $\omega=\Theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Οπότε, $u_x+u_y=0 \Leftrightarrow \underbrace{\nabla u(x,y)\cdot(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=\frac{\partial}{\partial \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)}u(x,y)}=0$

$\theta=\frac{\pi}{4}$: $x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y'=\frac{y-x}{\sqrt{2}}$

Δηλαδή, αυτή η εξίσωση λέει ότι η παράγωγος της u στην κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ είναι μηδέν, δηλαδή η u είναι σταθερή στην κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ δηλ. ως προς το νέο σύστημα (x',y') η λύση αυτής $u(x,y)$ θα έχει μερική παράγωγο ως προς $x'=0$. Άρα,

$$(\ast)\ u(x,y)=u\left(\omega^T\binom{x'}{y'}\right)=:\tilde{u}(x',y'),\ \text{με}\ \tilde{u}_{x'}(x',y')=0,\ \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2$$

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \underbrace{\tilde{u}(x',y')}_{=u(x,y)}=f(y')\overset{\circledast}{=}f\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(\ast)\ \nabla u(x,y)=\nabla_{(x,y)}\underbrace{\tilde{u}\left(\theta^T\binom{x'}{y'}\right)}_{=\tilde{u}(x',y')}\ \underset{}{\overset{\text{Αλυσίδα}}{=}}\ \nabla_{(x',y')}\tilde{u}(x',y')\,D_{(x,y)}\binom{x'}{y'}=$$

$$=(\partial_{x'}\tilde{u},\partial_{y'}\tilde{u})\begin{pmatrix}\frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y}\\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y}\end{pmatrix}=\left(\partial_{x'}\tilde{u}\frac{\partial x'}{\partial x}+\partial_{y'}\tilde{u}\frac{\partial y'}{\partial x},\ \partial_{x'}\tilde{u}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial y}\partial_{y'}\tilde{u}\right)$$

$$=\left(\tilde{u}_{x'}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_{y'}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \tilde{u}_{x'}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_{y'}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow u_x+u_y=\tilde{u}_{x'}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{u}_{y'}+\tilde{u}_{x'}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tilde{u}_{y'}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\tilde{u}_{x'}=0$$

<u>3η προσέγγιση (ΒΑΣΙΚΟΤΑΤΗ)</u>: <u>Με χαρακτηριστικές (καμπύλες)</u>

$$\begin{cases} u_x+u_y=0, & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,0)=f(x), & \forall x\in\mathbb{R}\ \text{με}\ y>0\end{cases}\ \longrightarrow \text{ΠΑΤ}$$

<u>Ιδέα</u>: Στις ΣΔΕ: $y'(x)=f(x,y)$, $y(0)=y_0$, $x>0$, όπου (γενικώς) οι λύσεις της ΣΔΕ παράγουν ένα διανυσματικό πεδίο $(1,y'(x))=(1,f(x,y))$ σε κάθε σημείο (x,y)

Για αυτήν την ΜΔΕ έχουμε το διανυσματικό $\nabla u(x,y)\perp(1,1)$

Άρα, η ιδέα για την λύση της είναι να βρούμε κάποιες καμπύλες, έτσι ώστε αυτές να συνδέουν το (x_0,y_0) ετ με $(\bar{x},0)$ στο ∂Ω και κατά μήκος αυτής της καμπύλης (χαρακτηριστικής) να μπορώ να υπολογίσω την τιμή της u (άρα σε ένα σημείο απ' το οποίο περνάει μια χαρακτηριστική θα ξέρω την τιμή του u)]

Συνολικά, ζητάω μια καμπύλη $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, με $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ και θεωρώ $Z(s) := u(\gamma(s))$. Τότε,

$$\dot{Z}(s) = \nabla u(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = u_x(\gamma(s))\,\dot{x}(s) + u_y(\gamma(s))\,\dot{y}(s).$$

Αν απαιτήσω $\dot{x}(s) = 1$, $\dot{y}(s) = 1$, $\underline{\forall s \in (-r, r)}$, $r > 0$, τότε

$$\dot{Z}(s) = u_x(\gamma(s)) + u_y(\gamma(s)) = 0 \iff Z(s) = Z(0) = u(\gamma(0)) = u(x_0, y_0)$$

Αν η $\gamma(s)$ τέμνει το άξονα των x, δηλ $\exists\, \tilde{s} \in \mathbb{R}$ με $\gamma(\tilde{s}) = (x(\tilde{s}), y(\tilde{s})) = (x(\tilde{s}), 0)$, τότε για αυτό το $\tilde{s}$ θα έχουμε

$$\underbrace{Z(\tilde{s})}_{= Z(0) = u(x_0, y_0)} = u(\gamma(\tilde{s})) = u(x(\tilde{s}), 0) = f(x(\tilde{s}))$$

Οπότε, θα έχουμε $u(x_0, y_0) = f(x(\tilde{s}))$

<u>Ερώτηση</u>: 1) Τέμνει η γ τον άξονα των x;

2) Ποιο είναι το $\tilde{s}$;